Voorbeelduitwerkingen bij de hoofdstukken 4 tot en met 7 van Gravetter & Wallnau

Hoofdstuk 4

Vraag: Bereken de standaardafwijking van een steekproef van kinderen(n=6) met de volgende scores op de CITO-test: 542, 536, 549, 529, 544, 540.

Stap 1. bereken het gemiddelde van de scores(tenzij die al gegeven is):

$$M = \frac{(542 + 536 + 549 + 529 + 544 + 540)}{6}$$

M = ***540***

Stap 2. Bereken de afwijking:

De afwijking is de afstand van elke losse score tot het gemiddelde, deze bereken je door het gemiddelde(M) van de score (X)af te trekken.

Cito-score (X)	Gemiddelde (M)	Afwijking (X- M)
542	540	2
536	540	-4
549	540	9
529	540	-11
544	540	4
540	540	0

Stap 3. Bereken het kwadraat van elke afwijking:

Deze kwadraten heb je bij de volgende stap nodig voor het berekenen van de SS. Bij het kwadrateren vervallen de negatieve waardes.

Cito-score (X)	Gemiddelde (M)	Afwijking (X- M)	Afwijking² $(X-M)^2$
542	540	2	4
536	540	-4	16
549	540	9	81
529	540	-11	121
544	540	4	16
540	540	0	0

Stap 4. Bereken de variantie (s^2):

De variantie (s^2) is het gemiddelde van alle kwadraten van de afwijking $\frac{SS}{n}$. De variantie (s^2) is ook het kwadraat van de standaardafwijking (s). Voor het berekenen de variantie heb je twee waardes nodig, die van SS en N/n. De waarde N/n is de grootte van de steekproef (n) of van de populatie(N). SS staat voor de "Sum of squares", letterlijk vertaald de som van de kwadraten. De kwadraten heb je uitgerekend in stap 3, die hoef je dus alleen nog bij elkaar op te tellen.

$s^2 = \frac{SS}{n}$.

SS = Sum of squares (kwadratensom)

SS = (4+16+81+121+16+0)

n = 6

$$s^2 = \frac{(4+16+81+121+16+0)}{6}$$

s^2 = **39,67 (afgerond op 2 decimalen)**

Stap 5. Bereken de standaardafwijking:

De standaardafwijking (s) is de wortel van de variantie (s²)

Variantie = s² = 39,67

Standaard deviatie = $\sqrt{\sigma^2}$ = s

Standaard deviatie = $\sqrt{39,67}$ = **6,30 (afgerond op 2 decimalen)**

Extra oefenvragen:

Vraag: Bereken de standaardafwijking van een groep studenten (N=5) met de volgende scores op het tentamen van MTS1 : 6,9,5,8,7.

Uitwerking:

Stap 1.

M = $\frac{(6 + 9 + 5 + 8 + 7)}{5}$.

M = **7**

Stap 2.

Score (X)	Gemiddelde (M)	Afwijking (X- M)
6	7	-1
9	7	2
5	7	-2
8	7	1
7	7	0

Stap 3.

Score (X)	Gemiddelde (M)	Afwijking (X- M)	Afwijking² (X- M) ²
6	7	-1	1
9	7	2	4
5	7	-2	4
8	7	1	1
7	7	0	0

Stap 4. Bereken het gemiddelde van alle kwadraten van de afwijking, dit is de variantie (s^2):

$s^2 = \frac{SS}{n}$.

SS = (1+4+4+1+0)

n = 5

$s^2 = \frac{(1+4+4+1+0)}{5}$

s^2 = **2**

Stap 5.

Variantie = s^2 = 2

Standaard deviatie = $\sqrt{\sigma^2}$ = s

Standaard deviatie = $\sqrt{2}$ = **1,41 (afgerond op 2 decimalen)**

Hoofdstuk 5:

Een z-score(z) berekenen vanaf een ruwe score (X)

Vraag: Bereken de z-score van een kind met een CITO-score van 544 uit een steekproef van kinderen(n=6) met de volgende scores op de CITO-test: 542, 536, 549, 529, 544, 540.

Stap 1. bereken het gemiddelde van de scores(tenzij die al gegeven is):

M = $\frac{(542 + 536 + 549 + 529 + 544 + 540)}{6}$

M = **540**

Stap 2. Bereken de afwijking (X- M):

Omdat je voor de Z-score specifiek in één score geïnteresseerd bent, hoef je maar één afwijking (X- M) te berekenen. Namelijk die van het kind met een score van 544 .

X = 544

M = 540

X – M = 4

Stap 3. Bereken de standaardafwijking (s) (tenzij die al gegeven is):

Volg het stappenplan van de standaardafwijking (hoofdstuk 4). Let op! Het kan zijn dat niet de standaardafwijking maar de variantie gegeven is, bereken dan de standaardafwijking (s) door de wortel te nemen van de variantie(s^2).

s = 6,30

Stap 4. Bereken de z-score:

De z-score bereken je door de afwijking (X- M) te delen door de variantie (s).

Z = $\frac{X - M}{s}$ = **0.63 (afgerond op 2 decimalen)**

Vraag 2: Bij een gemiddelde van 50 en een standaardafwijking van 10 is een score van 55 normaal, met een z-score van 0.5. Wat gebeurt er met de Z-score als de standaardafwijking 2 zou zijn?

Bij een standaardafwijking (s) van 2 is de Z score ineens een stuk groter, omdat de noemer (s) voor het berekenen van de z-score een stuk kleiner is:

$$Z = \frac{X - M}{s} = \frac{55 - 50}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$Z = \frac{X - M}{s} = \frac{55 - 50}{2} = \frac{5}{2} = \mathbf{2.5}$$

Extra vragen:

Vraag: Wat is de ruwe score van iemand die een Z-score heeft gehaald van -1,5, op een test met een gemiddelde van 7,5 en een standaardafwijking van 0,6?

Antwoord:

X = M + z s

M = 6,5

z = - 1.5

s = 0.6

X = 7,5 + - 1.5 * .6

X = 7,5 - .9

X = 6,4

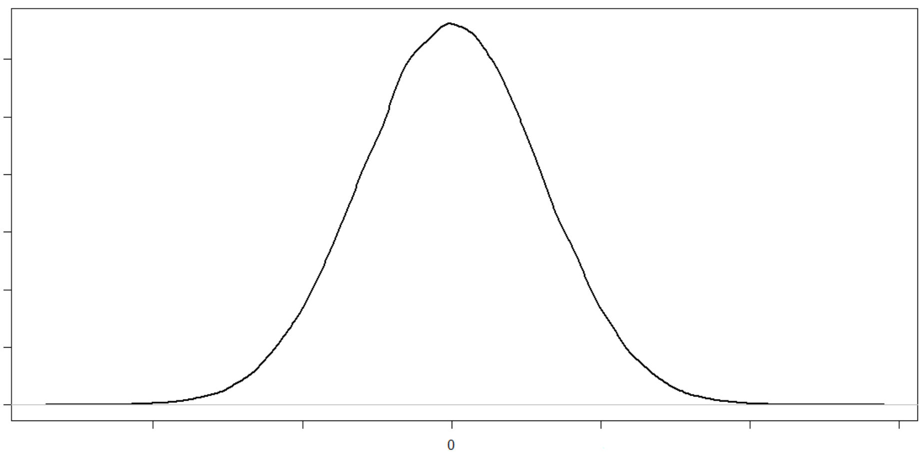
Hoofdstuk 6

Een proportie/kans vinden aan de hand van een z-score

Vraag: Wat is de kans dat iemand een 4 haalt op een test waarbij het gemiddelde een 7 is en de standaardafwijking 3 is?

Stap 1. Teken schematisch een normaalverdeling

Het midden van de verdeling ligt precies boven 0, omdat het midden van de verdeling het gemiddelde is en de z-score van het gemiddelde i 0s.

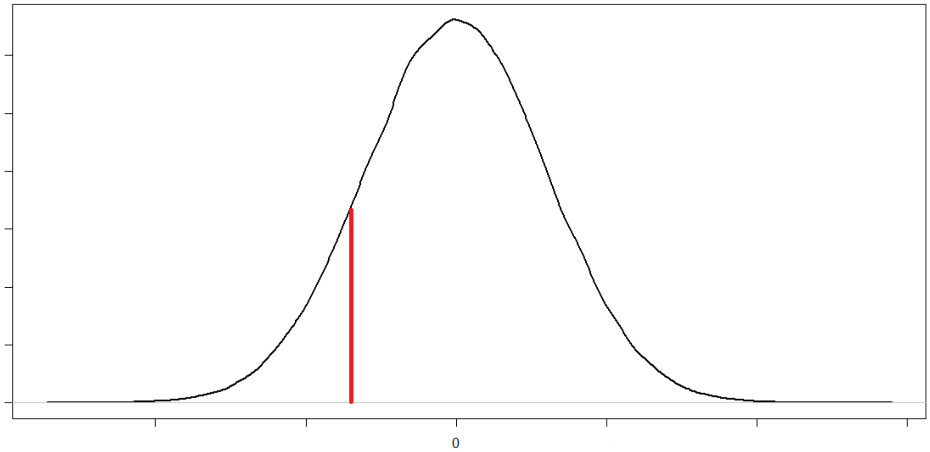


Stap 2. Teken een lijn op de plek waar de z-score ongeveer ligt

In de vraag wordt gesproken over een score van 4 met een gemiddelde van 7 en een standaardafwijking van 3, dit correspondeert met een z-score van -1:

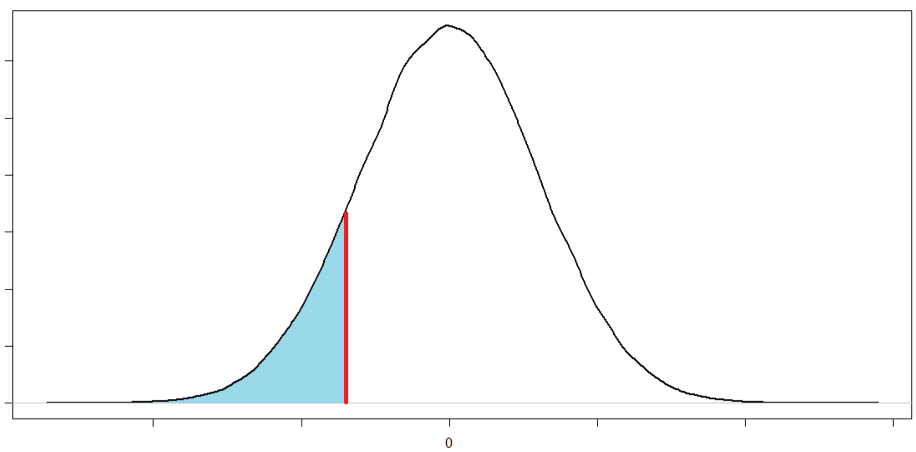
$$Z = \frac{X - M}{s} = \frac{4-7}{3} = -1$$

De plek van de lijn hoeft niet precies te kloppen, het gaat er bij deze stap om dat je kan zien of de z-score negatief is en dus onder 0 ligt, of positief is en dus boven 0 ligt.



Stap 3. Bepaal of je de proportie van de staart (tail) of het lichaam (body) wilt weten.

Bij dit voorbeeld gaat het om de kans dat iemand lager dan een 4 scoort, dus de linkerkant van de verdeling. Als je de linkerkant van de verdeling(gezien vanaf de lijn die je hebt getrokken) inkleurt, krijg je een vlak dat groter of kleiner is dan de helft van de verdeling. In dit geval krijg je een vlak dat minder dan de helft van de verdeling beslaat. Vuistregel: de staart is altijd kleiner dan Hierdoor weet je dat je straks in stap 4 moet zoeken naar de proportie in de tail. Is het vlak groter dan de helft van de verdeling, dan moet je kijken in de body.



Stap 4. Zoek de proportie op in de tabel van de normaalverdeling.

Je hebt in stap 2 een z-score van -1 gevonden, die staat niet in de tabel, bij negatieve waardes kijk je altijd naar de proporties die horen bij dezelfde positieve waarde, in dit geval 1. Bij stap 3 kwam je erachter dat je bij de proportie voor de tail moet kijken. De juiste proportie is dus: .1587. Dit is 15,87 procent.

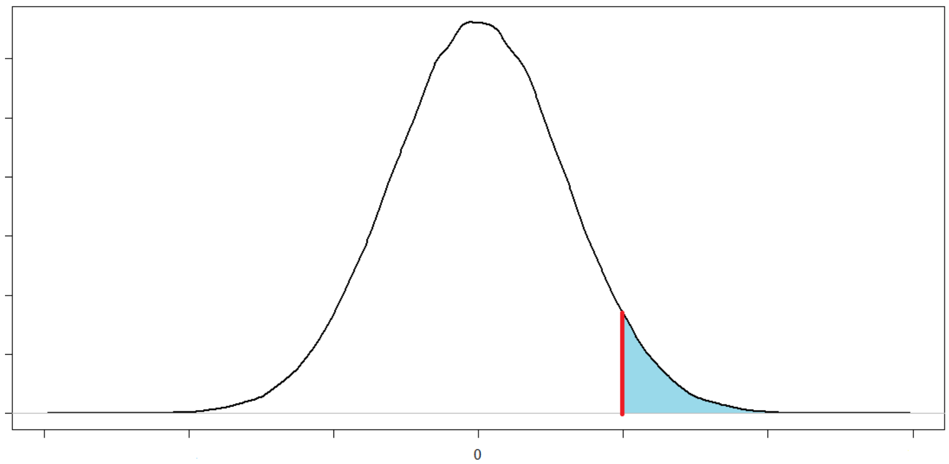
Je kan je antwoord checken door nog eens naar het plaatje dat je hebt getekend te kijken, lijkt het alsof er 15,87% in het ingekleurde vlak past? Zo nee, check dan zoals in stap 2 nog eens goed of je z-waarde positief of negatief is, en of je in stap 3 goed gekozen hebt voor de body of tail.

De z-score bepalen met behulp van de proportie/percentage

Vraag: Wat is de z-score die hoort bij de best scorende 10% ?

Stap 1. Z Teken de proportie in een normaalverdeling

Bij een percentage van 10% hoort een proportie van .10. Schets een normaalverdeling en kleur de proportie aan de goede kant in. Denk hierbij of het gaat om de proportie boven of onder een bepaalde waarde. In dit geval gaat het om de best scorende 10%, dus de rechterkant van de verdeling.



Stap 2. Bepaal of je naar de tail of de body zoekt.

Is de proportie die je getekend hebt groter of kleiner dan de helft van de verdeling? Is het groter, dan zoek je de body, is het kleiner dan zoek je de tail. Een ezelsbruggetje hiervoor kan zijn: denk aan een aapje, zijn lichaam(body) is groot en zijn staart(tail) maar een klein ten opzichte van zijn lichaam. In dit geval gebruik je maar een klein deel van de verdeling, dus gebruik je de tail.

Stap 3. Zoek de Z-waarde op in de tabel

Je weet in dit geval al dat de proportie .10 is, zoek deze waarde op in de tabel in de kolom van de tail (zie stap 2), en kijk welke z-waarde hierbij hoort. Het kan zijn dat je niet precies de proportie die je zoekt kan vinden, kies dan de proportie die het dichtst bij ligt. (liggen er twee waardes precies even dichtbij, dan maakt het niet uit welke z-waarde je kiest). Bij een proportie van .10 in de tail is .1003 de waarde die het dichtst bij ligt, hierbij hoort een z-waarde van 1.28.

Stap 4.

*Check in je tekening of de z-waarde negatief of positief moet zijn. Als de grens van de proportie onder 0 ligt, dan moet er een "-"teken voor de z-waarde. Als de grens boven 0 ligt, zoals hier het geval is, is de z-waarde positief en dus**: z = 1.28.***

Extra oefenvragen:

Vraag: Wat is de kans dat iemand een 8 of hoger haalt op een test waarbij het gemiddelde een 6 is en de standaardafwijking 1,2 is?:

Antwoord: p = ,0475, of 4,75%

Vraag: Wat is de z-score die hoort bij de best scorende 90% ?

Antwoord: z = -1.28

Hoofdstuk 7

De standaardfout berekenen.

Vraag: Wat is de standaardfout van een steekproef van 121 personen uit een populatie met een variantie van 7.56?

Stap 1. Bereken de standaardafwijking:

Zie H4 stappenplan standaardafwijking. In dit voorbeeld is er een simpelere manier, omdat de variantie gegeven is. De standaardafwijking is de wortel van de variantie.

Variantie = σ^2 = 7.56

Standaardafwijking = $\sqrt{\sigma^2}$ = σ

Standaardafwijking = $\sqrt{2}$.= 2.75 (afgerond op 2 decimalen)

Stap 2. Deel de standaardafwijking door de wortel van n (√n):

"n" is het aantal mensen in de steekproef.

n = 121

$\sqrt{n}$ = *11*

Standaardfout = $\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2.75}{11}$ = *4*

Kans op een sample mean van een normaal verdeelde populatie

Vraag: Wat is de kans op een sample mean groter dan M = 52 voor een random sample van 16 mensen die random geselecteerd zijn uit een populatie met μ = 50 en een standaardafwijking van 12?

Stap 1. Bereken de standaardfout

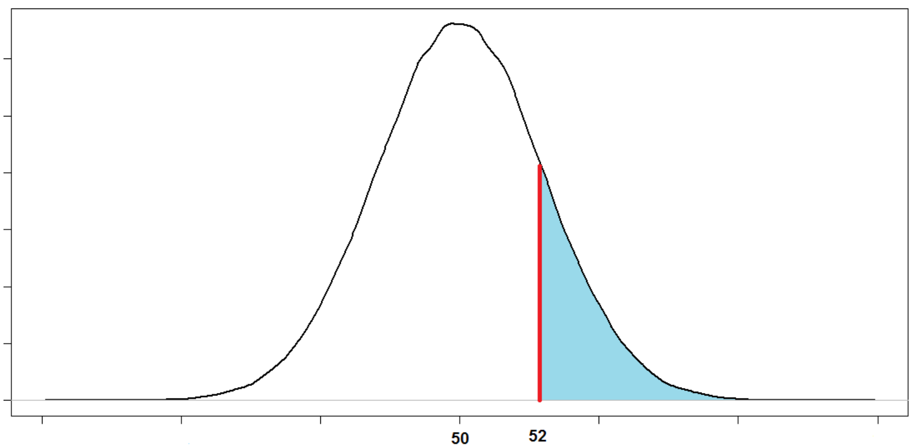
Zie stappenplan standaardfout.

Standaardfout= $\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{12}{\sqrt{16}} = \dfrac{12}{4}$ = *3*

Stap 2. Bereken de z-score

Zie stappenplan z-score (H5). In plaats van X – M gebruik je nu de sample mean (M) - de populatie mean (μ) , gedeeld door de standaardfout in plaats van de standaardafwijking.

$$Z = \frac{M - \mu}{\sigma_m} = \frac{52 - 50}{3} = \frac{2}{3} = .67$$



Stap 3. Bepaal of je naar de tail of de body kijkt

Het gaat hier om een de sample mean (52) die boven het gemiddelde van de populatie *(50) ligt , en de kans dat iemand hierboven scoort. Zoals te zien in de schets is dit minder dan de helft van de grafiek, dus de tail.*

Stap 4. Zoek de proportie op in de tabel

Kijk in de kolom van de tail, bij z = .67.

P(z > .67) = .2514

dit betekent dat de kans dat een sample mean van deze populatie groter is dan 52, 25.14 % is.

Extra vragen:

Vraag: Wat is de standaardfout van een steekproef van 144 personen uit een populatie met een variantie van 4?

Antwoord: *Standaardfout*= $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{144}} = \frac{4}{12}$ = *3*

Vraag: Wat is de kans op een sample mean kleiner dan M = 55 voor een random sample van 25 mensen die random geselecteerd zijn uit een populatie met μ = 50 en een standaardafwijking van 10?

$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5}$ = *2*

Z = $\frac{\sigma_m}{M - \mu ¿¿}$ = $\frac{2}{55 - 50 ¿¿}$ = 2.5

P(z < 2.5) = .9938

Ofwel, de kans op een sample mean kleiner dan M = 55 is 99.38%.