Deeltentamen 2014-2015

Meerkeuzevragen

1. Als Jan 's ochtends naar college fietst is er 32% kans dat de brug open staat en dat hij daardoor te laat komt. Een week bestaat uit 5 college-dagen. Wat is de kans dat Jan 3 of meer dagen te laat komt in een week?

   a. De kans is afgerond 0, 033.
   b. De kans is afgerond 0, 152.
   c. De kans is afgerond 0, 191.
   d. De kans is afgerond 0, 809

Dit is een binomiale kans dus gebruiken we de formule

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Hier geldt $p = 0.32$, $x = 3$ en $n = 5$, waarbij we met een succes bedoelen dat Jan te laat komt. We vinden dat deze kans gelijk is aan $P(3) + P(4) + P(5) = 0,151519 + 0,035652 + 0,003355 \approx 0,191$. of $1 - ((0.32^2 * 0.68^3) * 10 + (0.32^1 * 0.68^4) * 5 + 0.68^5)$

2. Een restauranteigenaar is geïnteresseerd in de verschillen in voorkeur voor thee of koffie bij mannen en vrouwen. Uit zijn onderzoek komen de volgende gezamenlijke kansen (joint probabilities) naar voren:

	Thee	Koffie
man	0,12	0,25
vrouw	0,29	0,34

Wat is de kans dat een willekeurige koffiedrinker een vrouw is?

   a. Die kans is afgerond 0,34.
   b. Die kans is afgerond 0,54.
   c. Die kans is afgerond 0,58.
   d. Die kans is afgerond 0,63.

$K =$ (koffie).
$V =$ (vrouw).
$P(V|K) = \frac{P(V \text{ en } K)}{P(K)} = \frac{0,34}{0,25+0,34} = 0,58.$

3. Een onderzoeksbureau is geïnteresseerd in het spaargedrag van gepensioneerden in de Gemeente Groningen. Er zijn 7 ouderen ondervraagd. Hieronder zijn de verkregen antwoorden weergegeven met betrekking tot het gespaarde vermogen in duizenden euro's.

   20 12 4 71 -4 2 9

   Een negatief bedrag betekent dat de gepensioneerde een schuld heeft. Wat is de standaarddeviatie van deze steekproef in duizenden euro's?

a. De standaarddeviatie is afgerond 24,41.

b. De standaarddeviatie is afgerond 25,32.

c. De standaarddeviatie is afgerond 62,01.

d. De standaarddeviatie is afgerond 640,90.

$\bar{x} = \frac{20+12+\cdots+9}{7} \approx 16,29$. De steekproefvariantie is gelijk aan $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 640,90$$. De gevraagde standaarddeviatie is dus $\sqrt{640,90} = 25,32$.

4. In de onderstaande grafiek (figuur 1) staat de verdeling van het aantal behaalde punten op een wiskundetest onderverdeeld naar geslacht weergegeven.

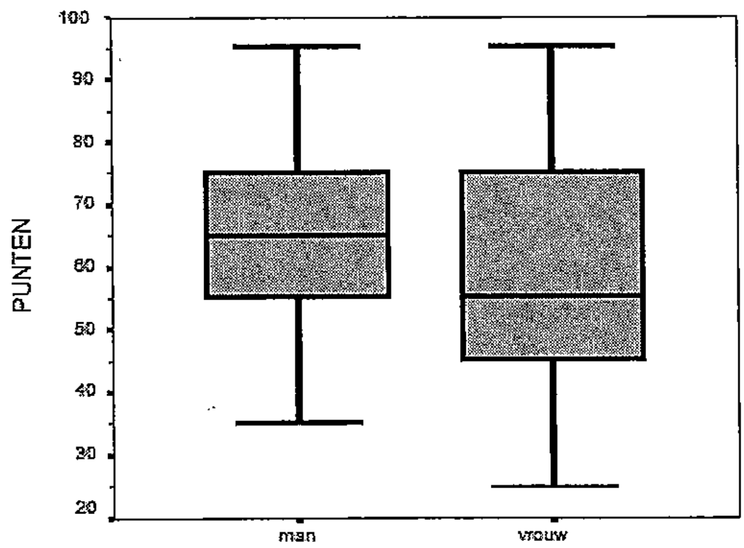
Een student heeft een voldoende wanneer deze 55 punten of meer heeft behaald. Welke bewering is juist?

a. Er zijn meer mannen dan vrouwen met een voldoende.

b. Er zijn evenveel mannen en vrouwen met een voldoende.

c. Er zijn minder mannen dan vrouwen met een voldoende.

d. Met de gegeven informatie kan je niet met zekerheid een van de drie bovenstaande conclusies trekken.



Figuur 1: Behaalde punten wiskunde test

De boxplots geven enkel de verdeling van cijfers onder mannen en vrouwen, niet de absolute aantallen. Onder de mannen zijn er 75% geslaagden, onder vrouwen 50%. Maar als het aantal vrouwen veel groter is dan mannen dan kan het nog zo zijn dat er meer vrouwen dan mannen geslaagd zijn.

5. Evert wil meedoen aan de hardloopwedstrijd 'de 4 mijl van Groningen'. Hij wil van tevoren het parcours enkele keren lopen om een inschatting te kunnen maken over zijn eindtijd. Hij weet uit ervaring dat zijn hardlooptijden op dergelijke afstanden normaal verdeeld zijn met een standaarddeviatie van 6 minuten.

   Wat is het minimale aantal keren dat Evert het parcours moet lopen om een 90% betrouwbaarheidsinterval op te kunnen stellen voor zijn verwachte eindtijd met een maximaal toelaatbare schattingsfout (bound of the error of estimation) van 2 minuten?

   a. 5 keer
   b. 24 keer
   c. 25 keer
   d. 35 keer

$z_{\alpha/2} = 1.645$, $B = 2$ en $\sigma = 4$. Daarom vinden we $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{B}\right)^2 = \left(\frac{1.645 \cdot 6}{2}\right)^2 = 24,354$. Omdat er een geheel getal nodig is ronden we af naar boven: 25 maal de afstand lopen is het juiste antwoord.

6. De levensduur van een A-merk batterij is uniform verdeeld tussen 240 en 380 dagen. Wat is de kans dat een willekeurig batterij van dit merk een levensduur heeft tussen de 265 en 320 dagen?

   a. De kans is afgerond 0,39.
   b. De kans is afgerond 0,45.
   c. De kans is afgerond 0,55.
   d. De kans is afgerond 0,61.

De kansdichtheidsfunctie is $f(x) = \frac{1}{380-240} = \frac{1}{140}$ voor $240 \leq x \leq 360$. Daarom is de kans $P(265 \leq X \leq 320) = (320 - 265)\frac{1}{140} \approx 0,393$.

7. Gegeven is de volgende steekproef:

   4 -3 2 0 -3 6 8

   Wat is het gemiddelde en wat is de modus van deze steekproef?

   a. Het gemiddelde is 2 en de modus is -3.
   b. Het gemiddelde is 2 en de modus is 0.

c. Het gemiddelde is $2\frac{1}{3}$ en de modus is -3.

d. Het gemiddelde is $2\frac{1}{3}$ en de modus is 0.

$\bar{x} = \frac{4-3+\cdots+8}{7} \approx 2$. De modus is het meest voorkomende getal, -3.

8. De kans dat een leugendetector aangeeft dat een persoon liegt, wanneer dat ook daadwerkelijk zo is, betreft 88%. De kans dat een leugendetector aangeeft dat een persoon de waarheid spreekt, wanneer dat ook daadwerkelijk zo is, betreft 86%.

   Stel dat een grote groep personen wordt ondervraagd met een leugendetector. De overgrote meerderheid heeft bij de ondervraging geen enkele reden om te liegen. Ga er vanuit dat slechts 1% van de ondervraagde personen daadwerkelijk liegt.

   Wat is de kans dat een persoon de waarheid spreekt, wanneer de leugendetector aangeeft dat de persoon liegt?

   a. De kans is afgerond 0,01.
   b. De kans is afgerond 0,08.
   c. De kans is afgerond 0,87.
   d. De kans is afgerond 0,94.

W is de gebeurtenis dat een persoon de waarheid spreekt. D is de gebeurtenis dat de detector aangeeft dat een persoon liegt. Dan

$$\begin{aligned} P(W|D) &= \frac{P(D|W)P(W)}{P(D|W)P(W) + P(D|W^c)P(W^c)} \\ &= \frac{0,14 \cdot 0,99}{0,14 \cdot 0,99 + 0,88 \cdot 0,01} \approx 0,94 \end{aligned}$$

9. Het gewicht van de cakejes die de plaatselijke bakker verkoopt is normaal verdeeld met een gemiddelde van 350 gram en een standaarddeviatie van 10 gram. Wat is de kans dat een willekeurige cake van de plaatselijke bakker tussen de 330 en 340 gram weegt?

   a. De kans is afgerond 0,14.
   b. De kans is afgerond 0,16.
   c. De kans is afgerond 0,28.
   d. De kans is afgerond 0,95.

Laat X het gewicht van de cake zijn in grammen.

$$\begin{aligned} P(330 < X < 340) &= P\left(\frac{330-350}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{340-350}{10}\right) \\ &= P(-2 < Z < -1) = P(Z < -1) \\ &\quad -P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359. \end{aligned}$$

10. Hieronder is de kansverdeling gegeven van toevalsvariabele X. Op de plaats ♯ in de tabel hoort eigenlijk een getal te staan dat groter is dan 8 maar dit getal onbreekt.

x	2	8	♯
Kans P(x)	0,5	0,4	0,1

Welke van onderstaande beweringen is juist?

a. De variantie van de verdeling is kleiner dan 8.

b. De verwachte waarde (expected value) van X is 5.

c. De variantie van de verdeling is groter dan 9.

d. Geen van bovenstaande beweringen is juist.

Gegeven is dat $Y > 8$. Stel dat $Y = 8$. Dan $E(X) = \mu = \sum xP(x) = 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 8 = 5$. Omdat $Y > 8$ volgt dat het gemiddelde hoger moet zijn dan dit getal. De variantie van X wanneer $Y = 8$ is gelijk aan $V(X) = \sum(x - \mu)^2 P(x) = 0.5 \cdot 3^2 + 0.5 \cdot 3^2 = 9$. Omdat $Y > 8$ is de spreiding groter dan dit, dus volgt dat de variantie groter is dan 9.

Open vragen

1. Een bedrijf wil besparen op energiekosten door zonnepanelen te plaatsen. Het kan kiezen uit twee type zonnepanelen, type A en type B. Uit onderzoek blijkt dat de besparing die het bedrijf kan behalen met het installeren van type A panelen per maand normaal verdeeld is met een gemiddelde van 80 euro en een standaarddeviatie van 20 euro.

   Wat het bedrijf echter niet weet is dat met type B panelen per maand een besparing kan worden behaald die normaal verdeeld is met een gemiddelde van 70 euro en een standaarddeviatie van 10 euro. Als proef besluit het bedrijf gedurende 5 maanden type A panelen te gebruiken en gedurende 5 maanden type B panelen.

   a. Wat is de kans dat de type B panelen gedurende 1 maand minder dan 80 euro besparen? (8 punten)

   > De besparing die type B panelen per maand opleveren, de toevalsvariabele X_2, is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_2 = 70$ euro en standaarddeviatie $\sigma_2 = 10$ euro. (2 punten) Dus:
   >
   > $$\begin{aligned} P(X_2 < 80) &= P\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} < \frac{80-70}{10}\right) = P(Z < 1) \\ &= 0,8413. \end{aligned}$$
   >
   > Resterende punten: 1 voor $P(X_2 < 80)$, 3 voor het normaliseren, 2 voor het eindantwoord.

   b. Wat is de kans dat de type B panelen gedurende 5 maanden gemiddeld minder dan 80 euro besparen? (12 punten)

   > De gemiddelde besparing van type B panelen, $\bar{X}_2$, is normaal verdeeld met gemiddelde 70 euro en standaarddeviatie $\frac{10}{\sqrt{5}}$ euro. (3 punten)
   > De kans dat de gemiddelde besparing minder dan 80 euro is is:
   >
   > $$\begin{aligned} P(\bar{X}_2 < 80) &= P\left(\frac{\bar{X}_2 - \mu_{\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_2}} < \frac{80-70}{10/\sqrt{5}}\right) = P(Z < 2,24) \\ &= 0,9875. \end{aligned}$$
   >
   > Resterende punten zoals in vraag a (2; 4; 3).

   c. Wat is de kans dat de gemiddelde besparing van type B panelen gedurende 5 maanden minder is dan de gemiddelde besparing van type A panelen gedurende 5 maanden? (12 punten)

De besparing per maand van type A panelen, de toevalsvariabele X_1, is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_1 = 80$ euro en standaarddeviatie $\sigma_1 = 20$ euro. Het verschil $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, waarbij $\bar{X}_1$ het steekproefgemiddelde aangaande de besparing van type A panelen is, is normaal verdeeld (1 punt) met gemiddelde $80 - 70 = 10$ euro (1 punt) en standaarddeviatie

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{100}{5} + \frac{400}{5}} = 10$$

euro. (4 punten) De te berekenen kans is dus:

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0) &= P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} > \frac{0 - 10}{10}\right) \\ &= P(Z > -1) = 1 - P(Z < -1) \\ &= 1 - 0,1587 = 0,8413. \end{aligned}$$

Punten: 1 voor $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0)$, 3 voor normalisatie en 2 voor het eindantwoord.

d. Het blijkt dat het bedrijf gemiddeld 75 euro heeft uitgespaard met type B panelen na 5 maanden. Van de fabrikant heeft het bedrijf inmiddels vernomen dat de standaarddeviatie van besparingen 10 euro per maand is. Stel, gebaseerd op deze steekproef (van 5 maanden), een 87.4% betrouwbaarheidsinterval (confidence-interval) op voor de verwachte besparing per maand van type B panelen. (10 punten)

De formule voor de verwachte besparing per maand van type B panelen, μ_2 is als volgt:

$$\bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}.$$

(2 punten) Hier is $n = 5$, $\sigma_2 = 10$ en $\bar{X}_2 = 75$. (2 punten)
Bij een 87.4% betrouwbaarheidsinterval hoort een z-waarde van $z_{\alpha/2} = z_{0,063} = 1,53$. (3 punten) Het volgt dat het gevraagde interval gelijk is aan:

$$[75 - 1,53\frac{10}{\sqrt{5}}; 75 + 1,53\frac{10}{\sqrt{5}}] \approx [68,16; 81,84].$$

(3 punten voor het eindantwoord)

2. Het bedrijf is ook gevestigd in enkele andere landen in Europa en vraagt zich af of de besparing van type B panelen afhankelijk is van de gemiddelde temperatuur op een locatie. De fabrikant stelt daarom enkele gegevens uit een steekproef op verschillende Europese locaties beschikbaar. Laat X de temperatuur zijn in graden Celsius op een locatie en Y de besparing die behaald is met het gebruik van zonnepanelen in euro's per maand. De volgende gegevens zijn aangeleverd door de fabrikant.

$$\bar{x} = 23 \quad s_x = 3 \quad s_{xy} = 24$$
$$\bar{y} = 76 \quad s_y = 10.$$

a. Schat met behulp van de kleinste kwadratenmethode (least squares method) een lineair verband tussen de temperatuur op een locatie en de mate van besparing in euro's, waarbij de besparing de afhankelijke (dependent) variabele is. Interpreteer ook de hellingscoëfficient van deze lijn. (12 punten)

De formule voor de te schatten lijn is

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x.$$

(1 punt)

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{24}{3^2} \approx 2,67.$$

(4 punten)

$$b_0 = \bar{y} - b_0\bar{x} = 76 - 2,67 \cdot 23 = 14,59.$$

(4 pt.). De hellingscoëfficient is $2,67$, wat betekent dat een stijging van de temperatuur met 1 graad Celcius **gemiddelde** 2,67 euro per maand wordt bespaard. (3 punten)

b. Bereken de determinatiecoëfficiënt (coefficient of determination) behorende bij de geschatte lijn en interpreteer deze. (6 punten)

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{24}{3 \cdot 10} = 0,8$$

(2 pt.). Daarom is de determinatiecoefficient gelijk aan $R^2 = (0,8)^2 = 0,64$. (1 punt) Dus de variatie in besparingen kan voor 64% worden verklaard door de variatie in temperatuur. (3 punten)

Einde van het tentamen.